

SITZUNGSBERICHTE DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1949 Nr. I

HANS ERTEL u. CARL-GUSTAV ROSSBY
EIN NEUER ERHALTUNGS-SATZ
DER HYDRODYNAMIK

1949

AKADEMIE-VERLAG BERLIN

I. Einleitung

Es sei $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor, $\vec{\xi} = \text{rot } \vec{v}$ der Wirbelvektor, $\text{grad } W = \nabla W$ der Gradient der Wirkungsfunktion $W = \int_0^t L dt$ (= HAMILTONsche Prinzipalfunktion) mit der LAGRANGE-Funktion $L = E_{kin} - E_{pot}$ (pro Masseneinheit) und σ das spezifische Volumen einer sich in einem Potentialfeld Φ bewegendes kompressiblen Flüssigkeit, für welche eine für alle Partikel geltende Piezotropie-Relation $\varrho = \varrho(p)$ ($\varrho = 1/\sigma =$ Dichte, $p =$ Druck) existieren möge. Wir beweisen nachstehend, daß der folgende Erhaltungssatz gilt:

$$(1) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \{ \sigma \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W) \} = 0},$$

worin

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

den EULERSchen Operator bedeutet.

In seiner integralen Form:

$$(2) \quad \boxed{\sigma \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W) = \overset{\circ}{\sigma} (\overset{\circ}{\xi}_x \overset{\circ}{v}_x + \overset{\circ}{\xi}_y \overset{\circ}{v}_y + \overset{\circ}{\xi}_z \overset{\circ}{v}_z)}$$

bringt dieser Erhaltungssatz zum Ausdruck, daß das skalare Produkt $\sigma \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W)$ längs jeder Trajektorie (Bahnlinie) einen konstanten Wert besitzt, nämlich den Wert

$$(3) \quad (\sigma \vec{\xi} \cdot \vec{v})_{t=0} = \overset{\circ}{\sigma} (\overset{\circ}{\xi}_x \overset{\circ}{v}_x + \overset{\circ}{\xi}_y \overset{\circ}{v}_y + \overset{\circ}{\xi}_z \overset{\circ}{v}_z)$$

des skalaren Produkts $\sigma \vec{\xi} \cdot \vec{v}$ zur Anfangszeit $t=0$ im Anfangspunkt

$$(4) \quad x_{t=0} = a, \quad y_{t=0} = b, \quad z_{t=0} = c$$

der betreffenden Trajektorie (x, y, z = orthogonale kartesische Koordinaten; a, b, c = LAGRANGESche Numerierungskordinaten der betreffenden Partikel), denn zur Zeit $t = 0$ ist $W = 0$ im ganzen Strömungsfeld und damit auch $(\nabla W)_{t=0} = 0$.

II. Beweis des Erhaltungssatzes

a) Inertialsysteme

Ausgehend von den LAGRANGESchen hydrodynamischen Gleichungen in der für Inertialsysteme geltenden Form:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial a} = - \frac{\partial}{\partial a} \left(\Phi + \int \frac{dp}{\varrho} \right), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial b} = - \frac{\partial}{\partial b} \left(\Phi + \int \frac{dp}{\varrho} \right), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial c} = - \frac{\partial}{\partial c} \left(\Phi + \int \frac{dp}{\varrho} \right), \end{cases}$$

bilden wir deren erste Integrale (WEBERSche Transformation [Lit. (1—5)]):

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial a} = \dot{v}_x + \frac{\partial W}{\partial a}, \\ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial b} = \dot{v}_y + \frac{\partial W}{\partial b}, \\ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial c} = \dot{v}_z + \frac{\partial W}{\partial c}, \end{cases}$$

worin $\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$ die Geschwindigkeitskomponenten für $t = 0$ bedeuten und

$$(7) \quad W = \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} v^2 - \left(\Phi + \int \frac{dp}{\varrho} \right) \right\} dt$$

die HAMILTONsche Prinzipalfunktion (Wirkungsintegral) mit

$$(8) \quad E_{kin} = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\vec{v})^2,$$

$$(9) \quad E_{pot} = \Phi + \int \frac{dp}{\varrho}$$

darstellt. Die Integration über die Zeit t in (7) ist eine „individuelle“ längs der Trajektorie; jedem einfachen Punkt der Trajektorie ist eindeutig ein bestimmter Zeitwert zugeordnet.

Die Auflösung der WEBERSchen Gleichungen (6) nach

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

durch Multiplikation mit $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, ... usw. und Addition, also der Übergang zu den EULERSchen unabhängigen Variablen (x, y, z, t) ergibt:

$$(10) \quad \begin{cases} v_x = \overset{\circ}{v}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \overset{\circ}{v}_y \frac{\partial b}{\partial x} + \overset{\circ}{v}_z \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}, \\ v_y = \overset{\circ}{v}_x \frac{\partial a}{\partial y} + \overset{\circ}{v}_y \frac{\partial b}{\partial y} + \overset{\circ}{v}_z \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v_z = \overset{\circ}{v}_x \frac{\partial a}{\partial z} + \overset{\circ}{v}_y \frac{\partial b}{\partial z} + \overset{\circ}{v}_z \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z}, \end{cases}$$

oder vektoriell:

$$(11) \quad \vec{v} - \nabla W = \overset{\circ}{v}_x \nabla a + \overset{\circ}{v}_y \nabla b + \overset{\circ}{v}_z \nabla c.$$

Aus dieser Darstellung folgt durch Ausübung der rot-Operation:

$$(12) \quad \text{rot } \vec{v} = \vec{\xi} = \nabla \overset{\circ}{v}_x \times \nabla a + \nabla \overset{\circ}{v}_y \times \nabla b + \nabla \overset{\circ}{v}_z \times \nabla c$$

(mit $\times$ als Symbol der Vektor-Multiplikation), welcher Ausdruck durch die Substitution von

$$(13) \quad \begin{cases} \nabla \overset{\circ}{v}_x = \frac{\partial \overset{\circ}{v}_x}{\partial a} \nabla a + \frac{\partial \overset{\circ}{v}_x}{\partial b} \nabla b + \frac{\partial \overset{\circ}{v}_x}{\partial c} \nabla c, \\ \nabla \overset{\circ}{v}_y = \frac{\partial \overset{\circ}{v}_y}{\partial a} \nabla a + \frac{\partial \overset{\circ}{v}_y}{\partial b} \nabla b + \frac{\partial \overset{\circ}{v}_y}{\partial c} \nabla c, \\ \nabla \overset{\circ}{v}_z = \frac{\partial \overset{\circ}{v}_z}{\partial a} \nabla a + \frac{\partial \overset{\circ}{v}_z}{\partial b} \nabla b + \frac{\partial \overset{\circ}{v}_z}{\partial c} \nabla c, \end{cases}$$

in

$$(14) \quad \vec{\xi} = \xi_x \nabla b \times \nabla c + \xi_y \nabla c \times \nabla a + \xi_z \nabla a \times \nabla b$$

mit

$$(15) \quad \begin{cases} \xi_x^\circ = \frac{\partial v_z^\circ}{\partial b} - \frac{\partial v_y^\circ}{\partial c}, \\ \xi_y^\circ = \frac{\partial v_x^\circ}{\partial c} - \frac{\partial v_z^\circ}{\partial a}, \\ \xi_z^\circ = \frac{\partial v_y^\circ}{\partial a} - \frac{\partial v_x^\circ}{\partial b}, \end{cases}$$

übergeht. Es sei hierzu bemerkt, daß die mittels (14) folgendermaßen darstellbaren skalaren Produkte

$$\begin{aligned} \vec{\xi} \cdot \nabla a &= \xi_x^\circ \nabla a \times \nabla b \cdot \nabla c = \xi_x^\circ \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}, \\ \vec{\xi} \cdot \nabla b &= \xi_y^\circ \nabla a \times \nabla b \cdot \nabla c = \xi_y^\circ \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}, \\ \vec{\xi} \cdot \nabla c &= \xi_z^\circ \nabla a \times \nabla b \cdot \nabla c = \xi_z^\circ \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}, \end{aligned}$$

auf Grund der Funktionaldeterminanten-Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} \cdot \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}, \\ \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} \cdot \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}, \\ \frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} \cdot \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}, \end{aligned}$$

usw. mit den CAUCHYSchen Integralen [Lit. (6)]

$$\xi_x^\circ \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} + \xi_y^\circ \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} + \xi_z^\circ \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} = \xi_x^\circ$$

usw. der hydrodynamischen Wirbelgleichungen LAGRANGEScher Form identisch sind.

Skalare Multiplikation von (11) und (14) ergibt zunächst:

$$(16) \quad \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W) = (\xi_x^\circ v_x + \xi_y^\circ v_y + \xi_z^\circ v_z) \nabla a \times \nabla b \cdot \nabla c,$$

und mittels der LAGRANGESchen Kontinuitätsgleichung

$$(17) \quad \nabla a \times \nabla b \cdot \nabla c = \frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\rho}{\rho} = \frac{\sigma}{\sigma}$$

geht (16) dann in

$$(18) \quad \sigma \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W) = \overset{\circ}{\sigma} (\overset{\circ}{\xi}_x \overset{\circ}{v}_x + \overset{\circ}{\xi}_y \overset{\circ}{v}_y + \overset{\circ}{\xi}_z \overset{\circ}{v}_z)$$

über, womit die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) bewiesen ist, da die rechte Seite von (18) nur Funktionen der LAGRANGESchen Numerierungskoordinaten (a, b, c) enthält, hingegen von der Zeit t unabhängig ist.

Im Spezialfall einer zweidimensionalen Strömung in einem Inertialsystem, z. B. in der x, y -Ebene, sind

$$\xi_x = \xi_y = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{für}$$

$t \geq 0$ und somit beide Seiten der Gleichung (2) gleich Null. (Hinsichtlich der Sonderstellung zweidimensionaler Strömungen vgl. z. B. auch A. SOMMERFELD [Lit. (7)]).

b) Rotierende Koordinatensysteme

Es sei jetzt

$$(19) \quad \vec{r} = \{x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t)\}$$

der Positionsvektor der Partikel a, b, c zur Zeit t in einem rotierenden kartesischen Koordinatensystem (Rechtssystem), dessen Rotation durch den konstanten Drehvektor $\vec{\omega}$ ($|\vec{\omega}| = \omega$) gekennzeichnet sei. Bezeichnen wir mit

$$(20) \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

die absolute Geschwindigkeit, mit

$$(21) \quad \vec{\xi} = \text{rot } \vec{v} = \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) + 2 \vec{\omega}$$

den absoluten Wirbel, so gilt der Erhaltungssatz in der gleichen Form:

$$(22) \quad \sigma \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W) = \overset{\circ}{\sigma} (\overset{\circ}{\xi}_x \overset{\circ}{v}_x + \overset{\circ}{\xi}_y \overset{\circ}{v}_y + \overset{\circ}{\xi}_z \overset{\circ}{v}_z),$$

mit der folgenden Darstellung der in $W = \int_0^t L dt$ auftretenden LAGRANGE-Funktion [Lit. (8)]:

$$(23) \quad L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 + \omega D_\omega - \left(\Phi^* + \int \frac{dp}{\varrho} \right),$$

worin mit $D_\omega = |\vec{D}| \cos(\vec{\omega}, \vec{D})$.

$$(24) \quad \omega D_\omega = \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)$$

die mit ω multiplizierte Projektion D_ω des auf das rotierende System bezogenen Drehimpulses (pro Masseneinheit) $\vec{D} = \vec{r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ der Partikel bedeutet und $\Phi^* = \Phi - \frac{1}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2$ das Zentrifugalpotential $-\frac{1}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2$ enthält. (Φ^* = Schwerepotential, Φ = NEWTONSches Attraktionspotential).

Der Beweis der Gleichung (22) kann folgendermaßen geführt werden:

Die auf das rotierende System bezogenen LAGRANGESchen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\Phi^* + \int \frac{dp}{\varrho} \right), \\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} = -\frac{\partial}{\partial b} \left(\Phi^* + \int \frac{dp}{\varrho} \right), \\ \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} = -\frac{\partial}{\partial c} \left(\Phi^* + \int \frac{dp}{\varrho} \right), \end{cases}$$

gestatten wegen

$$(26) \quad \begin{aligned} \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{r} \right) - \vec{\omega} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial a \partial t} \cdot \vec{r} \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{r} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \cdot \vec{r} \right) - \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\}, \end{aligned}$$

also

$$(27) \quad 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a} (\omega D_\omega) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \right)$$

(und entsprechenden Gleichungen mit den Variablen b, c) die Darstellung:

$$(28) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \right\} - \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \omega D_\omega - \left(\ddot{\Phi} + \int \frac{dp}{\varrho} \right) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} \right\} - \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \omega D_\omega - \left(\ddot{\Phi} + \int \frac{dp}{\varrho} \right) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} \right\} - \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \omega D_\omega - \left(\ddot{\Phi} + \int \frac{dp}{\varrho} \right) \right\}, \end{cases}$$

die durch Substitution der absoluten Geschwindigkeit (20) und der LAGRANGE-Funktion (23) zu einer Reduktion auf die für ein Inertialsystem geltenden LAGRANGESchen Gleichungen (5) in der Form

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \right) = \frac{\partial L}{\partial a}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} \right) = \frac{\partial L}{\partial b}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} \right) = \frac{\partial L}{\partial c}, \end{cases}$$

führt.

Hieraus folgen die ersten Integrale:

$$(30) \quad \begin{cases} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} = \overset{\circ}{v}_x + \frac{\partial W}{\partial a}, \\ \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} = \overset{\circ}{v}_y + \frac{\partial W}{\partial b}, \\ \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial c} = \overset{\circ}{v}_z + \frac{\partial W}{\partial c}, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit (6), und der weitere Gang der Rechnung verläuft wie oben (Abschnitt IIa). Die Identität der beiden Darstellungen (7) und (23) der LAGRANGE-Funktion erkennt man mittels der quadrierten Gleichung (20):

$$(31) \quad \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\vec{v})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 + \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2,$$

womit der von den LAGRANGESchen hydrodynamischen Gleichungen (25) ausgehende Beweis abgeschlossen ist.

Es ist natürlich auch möglich, den neuen Erhaltungssatz ausgehend von den EULERSchen hydrodynamischen Gleichungen zu beweisen, wobei man am zweckmäßigsten von einer sehr allgemeinen Formulierung der hydrodynamischen Wirbelsätze [ERTEL, Lit. (9)] Gebrauch macht; wir gehen hierauf an anderer Stelle [Lit. (10)] näher ein.

III. Vereinfachung für inkompressible Flüssigkeiten

Für inkompressible Flüssigkeiten ($\sigma = \bar{\sigma}$) nimmt der Erhaltungssatz die einfachere Form

$$(31) \quad \vec{\xi} \cdot (\vec{v} - \nabla W) = (\xi_x \dot{v}_x + \xi_y \dot{v}_y + \xi_z \dot{v}_z)$$

an, wobei im Integranden von W , d. h. in der LAGRANGE-Funktion L , noch die Vereinfachung $\int \frac{dp}{\varrho} = \frac{p}{\varrho}$ eintritt.

Literatur

- (1) H. WEBER, Über eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. Crelles Journal Bd. LXVIII (1868), S. 286.
- (2) L. LICHTENSTEIN, Grundlagen der Hydromechanik. Berlin 1929, S. 405—409.
- (3) H. LAMB, Lehrbuch der Hydrodynamik. 2. deutsche Aufl. Leipzig-Berlin 1931, S. 16.
- (4) H. FALKENHAGEN, Klassische Hydrodynamik (Handbuch der Exp.-Physik, Bd. 4, Teil 1). Leipzig 1931, S. 71—74.
- (5) W. HORT und A. THOMA, Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. Leipzig 1939, S. 511—513.
- (6) A. S. RAMSEY, A Treatise on Hydromechanics. Part II, Hydrodynamics. London 1947, S. 25—26.
- (7) A. SOMMERFELD, Mechanik der deformierbaren Medien. Leipzig 1945, S. 141—142.
- (8) H. ERTEL, Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie. Berlin (J. Springer) 1938 und Ann Arbor, Mich. (Edwards Brothers) 1943, S. 41—44.
- (9) H. ERTEL, Über hydrodynamische Wirbelsätze. Physikal. Zeitschr. Leipzig 1942, S. 526—529. — Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. Meteorolog. Zeitschr. Braunschweig 1942, S. 277—281.
- (10) H. ERTEL und C.-G. ROSSBY, A new Conservation-Theorem of Hydrodynamics. Geofisica pura e applicata, Vol. XIV. Mailand 1949 (im Druck).